ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ
диагностической работы для учителей математики

Выполните каждое из заданий 1–13 и запишите ответы

Часть 1.

Предметная подготовка

1. Решите уравнение $\sqrt{63-2x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответ: _____(7)

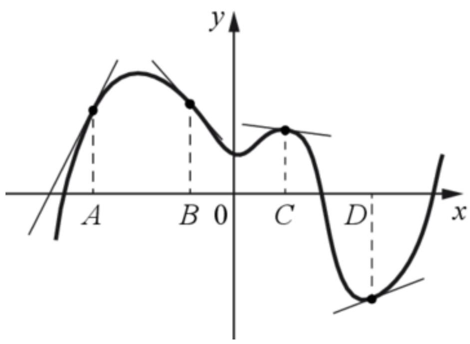
2. Телефонная компания предлагает на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за 1 минуту разговора
«Повременный»	Нет	1 руб.
«Комбинированный»	160 руб. за 300 минут	1 руб. 50 коп (за минуты свыше 300 минут)
«Безлимитный»	499 руб.	Нет

Абонент предполагает, что общая длительность его разговоров составит 500 минут в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц, если общая длительность разговоров составит 450 минут?

Ответ: _____(385)

3. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательные к этому графику, проведённые в точках с абсциссами A, B, C и D.



В правом столбце указаны значения производной функции в этих точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной в этой точке.

ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ	
A	1) $-\frac{2}{15}$	3) $\frac{5}{13}$
B		
C	2) 2	4) $-1\frac{2}{15}$
D		

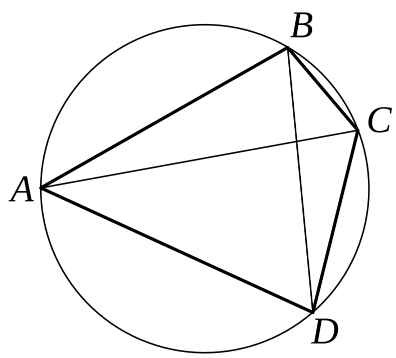
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

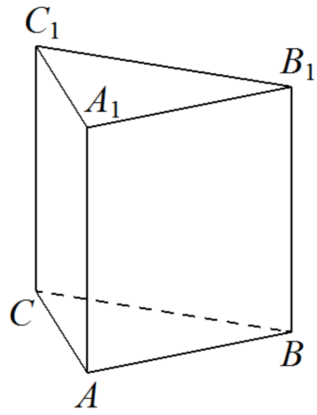
Ответ: ______________________________(2413).

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $98°$, угол CAD равен $44°$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____ (54)

5. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 7. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A_1 и C_1.



Ответ: _____(28)

6. Четырёхзначное число N делится на 5. Если цифры этого числа записать в обратном порядке, то получится другое четырёхзначное число, которое меньше числа N на 1629. Найдите какое-нибудь одно число N, удовлетворяющее указанному свойству.

Ответ: ___________________________. (Одно из чисел 6705, 6815 или 6925)

Часть 2.

Методическая подготовка

7. **Определите последовательности этапов работы с элементами математического содержания**

Правильная последовательность шагов алгоритма для деления дробей
1: Определить делимое
2: Определить делитель
3: Найти дробь, обратную делителю
4: Делимое умножить на число, обратное делителю, по правилу умножения дроби на дробь
5: Если возможно, полученную дробь сократить
6: Записать ответ

8. **Определение математического базиса выполняемых действий.**

Решите следующую геометрическую задачу: «В трапеции ABCD диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны». Какие теоретические факты должны использовать учащиеся при обосновании ее решения?
-: формулу площади трапеции;
+: свойство площадей равносоставленных фигур;
+: формулу площади треугольника;
+: свойство длин перпендикуляров, расположенных между двумя параллельными прямыми;
-: признаки подобие треугольников.

9. **Соответствие между задачами и приемами их решения или между основанием классификации математических задач и классом**

Установите соответствие задач на сравнение чисел и целесообразных приемов их решения:
L1: $\frac{8}{3}$и $\frac{3}{8}$;
L2: $\frac{51}{100}$ и 1;
L3: $\frac{3}{27}$и $\frac{3}{51}$;
L4: $\frac{8}{15}$и $\frac{4}{15}$;
L5: 1 и $\frac{107}{101}$.

R1: Свойство сравнения правильной и неправильной дроби
R2: Использование определения и свойства правильной дроби;
R3: Сравнение знаменателей при одинаковых числителях
R4: Сравнение числителей при одинаковых знаменателях
R5: Использование определения и свойства неправильной дроби;
R6: Приведение дробей к общему знаменателю и сравнение их числителей;

10. **Типология задач по математической основе или по методу решения**

Выберите задачу, которая решаются способом исключения неизвестных.
\+ 11 апельсинов и 9 лимонов стоят 245 рублей, один апельсин и один лимон стоят 25 рублей. Сколько стоит один лимон?
\- 15 кг яблок стоят 600 рублей. Сколько кг яблок можно купить на 400 рублей?
\- Сумма тринадцати различных натуральных чисел равна 92. Найдите эти числа.
\- На первой полке книг в 6 раз больше, чем на второй. Известно, что на ней на 150 книг больше, чем на второй. Сколько книг на каждой полке?

11. **Выбор математических обоснований при ответе на вопросы ученика**

Выберите обоснование для ответа на вопрос ученика: «Почему, если в конце десятичной дроби приписать нули, то ее величина не изменится?»

Приписывание нулей в конце десятичной дроби соответствует операции
\+ приведения обыкновенной дроби к новому знаменателю
\- деления числителя и знаменателя дроби на одно и то же число
\- умножения числителя и знаменателя дроби на 5
\+ умножения числителя и знаменателя дроби на одну и ту же натуральную степень 10
\- сокращения дроби

12. Поиск причины ошибки

При решении задачи: «Найти натуральные x, при которых $2\frac{5}{9} < \frac{x}{9} < 3\frac{7}{9}$» ученик получил ошибочный ответ x = 6. Причиной его ошибки является:
-: незнание порядка расположения чисел в натуральном ряде чисел;
+: сравнение только дробных частей смешанных чисел;
-: неумение обращать смешанное число в неправильную дробь;
-: неверные представления о расположении дробных чисел на числовой оси;
-: неумение сравнивать обыкновенные дроби.

Часть 3.

Предметно-методическая компетенция

В задании 13:

1. Запишите решение и ответ, воспользовавшись при необходимости примером решения похожей задачи (пример дан на отдельном листе).

2. Сформулируйте для учащихся несколько вопросов и заданий, направленных на поиск решения предложенной задачи

13. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение:

Ответ:

В заданиях 14 и 15 запишите развернутый ответ, суждение, мнение

14. На диагностической работе в апреле школьники получили задачу.

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 48 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 10 часов. Ответ дайте в км/ч.

После обработки результатов оказалось, что среди ответов наиболее часто встречаются четыре варианта: 8,8; 20; 19,2 и 9,6.

1. Какой из вариантов ответа правильный?
2. В результате каких ошибок могли быть получены неверные ответы из данного списка? Проанализируйте причины этих ошибок и предложите план итогового повторения для их устранения.

Решение:

15. Ниже приведено решение задачи и критерии оценивания.

1. Оцените решение в соответствии с критериями, обоснуйте свою оценку.
2. Предложите одну вспомогательную задачу, направленную на поиск решения данной задачи

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

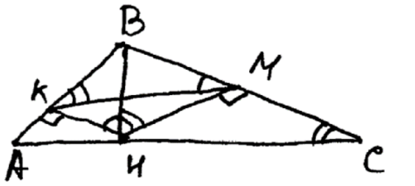
а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 3$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4.

C4.

Дано:

$\triangle ABC$



а) четырехугольник BMHK вписан. т.к. $\angle BKH = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BHM = \angle BKM$

$\angle MHC = 90° - \angle MHB$

$\angle MCH = 90° - \angle MHC = \angle MHB = \angle MKB$

Таким образом, $\triangle BKM$ подобен $\triangle ABC$ по двум углам ($\angle ABC$ - общий) б) По теореме синусов:

$\frac{AC}{\sin B} = 2 \cdot 4 \Rightarrow AC = 8\sin B$

Площадь $\triangle ABC$, $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8\sin B = 12\sin B$

Рассмотрим окруж., описанную вокруг $\triangle BMK$ (она же описана вокруг $BMKH$): $\angle BKH = 90° \Rightarrow BH$ – ее диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ее радиус равен 1,5.

По т. синусов:

$\frac{MK}{\sin B} = 2 \cdot 1{,}5 \Rightarrow MK = 3\sin B$

коэф. подобия $k = \frac{MK}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

S_1 – площадь $\triangle MBK$, S_2 – площадь $\triangle KMC$

$\frac{S_1}{S} = k^2 = \frac{1}{16}$ $\quad S_1 = \frac{S}{16}$

$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S_2 = S \cdot \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{15}$

Критерии оценивания

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение:

Пример решения аналогичной задачи (к заданию 13)

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

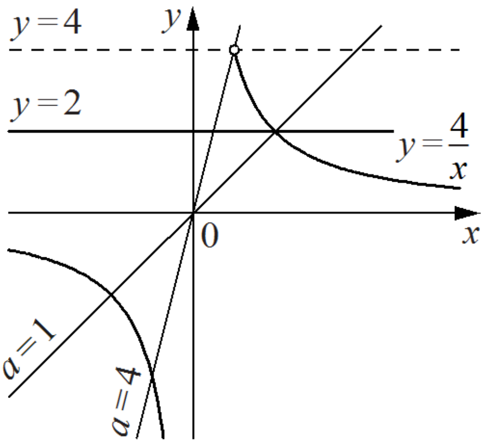
$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-2xy-4y+8}{\sqrt{4-y}}=0, \\ y=ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-2)(xy-4)}{\sqrt{4-y}}=0.$$



При $y \ge 4$ левая часть не имеет смысла.
При $y<4$ уравнение задаёт прямую $y=2$ и гиперболу $y=\dfrac{4}{x}$ (см. рисунок).

При каждом значении a уравнение $y=ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через начало координат.

При $y<4$ такая прямая пересекает прямую $y=2$ при любом ненулевом значении a, пересекает правую ветвь гиперболы $y=\dfrac{4}{x}$ при $0<a<4$, пересекает левую ветвь гиперболы $y=\dfrac{4}{x}$ при $a>0$. При этом прямая $y=ax$ проходит через точку пересечения прямой $y=2$ и гиперболы $y=\dfrac{4}{x}$ при $a=1$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y=2$ и гиперболы $y=\dfrac{4}{x}$ с прямой $y=ax$ при условии $y<4$.

Таким образом, исходная система имеет ровно три решения при

$$0<a<1;\ 1<a<4.$$

Ответ: $0 < a < 1$; $1 < a < 4$.